Informatique Appliquée au Calcul Scientifique 2
Séance 7

Schéma "RK4" de Runge et Kutta

Table des matières

I. Schéma de Runge-Kutta d'ordre 4 (RK4)

I.1. Principe

Cette méthode permet de calculer des solutions approchées avec une meilleure précision que la méthode d'Euler, tout en restant relativement simples à mettre en œuvre.
Nous rappelons que l'objectif est de résoudre une équation différentielle du type :

$$\begin{cases} y'(x) = f\big(y(x)\big) \ \forall x \in [a, b] \\ y(a) = y_0 \end{cases}$$

Le schéma de Runge-Kutta consiste à intégrer l'équation entre t_n et t_{n+1} :

$$y(t_{n+1}) - y(t_n) = \int_{t_n}^{t_{n+1}} f\big(y(x)\big)dx$$

puis à approcher l'intégrale du membre de droite par la formule de Simpson :

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}} f\big(y(x)\big)dx \approx \frac{h}{6}(f(y(t_n)) + 4f(y(t_n + \frac{h}{2})) + f(y(t_{n+1}))$$

Ce qui nous permet d'écrire :

$$y(t_{n+1}) - y(t_n) \approx \frac{h}{6}(f(y(t_n)) + 4f(y(t_n + \frac{h}{2})) + f(y(t_{n+1})))$$

En tant que telle, cette relation est assez peu exploitable pour construire un schéma du fait que la valeur de $f(y(t_n + \frac{h}{2}))$ reste mal déterminée.

Nous allons utiliser d'abord un schéma explicite d'Euler entre les instants t_n et $t_n + \frac{h}{2}$:

$$y(t_n + \frac{h}{2}) \approx \tilde{y}_{n+\frac{h}{2}} = y(t_n) + \frac{h}{2} f(y(t_n)) \quad (1)$$

Puis nous utilisons cette valeur de $\tilde{y}_{n+\frac{h}{2}}$ pour fabriquer une nouvelle approximation au même instant intermédiaire :

$$y(t_n + \frac{h}{2}) \approx \tilde{\tilde{y}}_{n+\frac{h}{2}} = y(t_n) + \frac{h}{2} f(\tilde{y}_{n+\frac{h}{2}}) \quad (2)$$

Ensuite, nous trouvons une première approximation $\tilde{y}_{n+1}$ de $y(t_{n+1})$ à l'aide d'une formule du point milieu :

$$y(t_{n+1}) - y(t_n) = \int_{t_n}^{t_{n+1}} f\big(y(x)\big)dx \approx hf(y(t_n + \frac{h}{2}))$$

et nous allons remplacer $y(t_n + \frac{h}{2})$ par son approximation trouvée dans (2). Il vient :

$$\tilde{y}_{n+1} = y(t_n) + hf(\tilde{\tilde{y}}_{n+\frac{h}{2}}) \quad (3)$$

Pour la formule de Simpson que nous allons utiliser, on va approcher $4f(y(t_n + \frac{h}{2}))$ par la moyenne suivante :

$$4f(y(t_n+\frac{h}{2}))\approx 2f(\tilde{y}_{n+\frac{h}{2}})+2f(\tilde{\tilde{y}}_{n+\frac{h}{2}}) \quad (4)$$

En utilisant (3) et (4) dans la formule de Simpson, on trouve finalement :

$$y_{n+1}=y_n+\frac{h}{6}(f(y(t_n)+2f(\tilde{y}_{n+\frac{h}{2}})+2f(\tilde{\tilde{y}}_{n+\frac{h}{2}})+f(\tilde{y}_{n+1}))$$

Avec :

$$\tilde{y}_{n+\frac{h}{2}}=y(t_n)+\frac{h}{2}f(y(t_n))$$
$$\tilde{\tilde{y}}_{n+\frac{h}{2}}=y(t_n)+\frac{h}{2}f(\tilde{y}_{n+\frac{h}{2}})$$
$$\tilde{y}_{n+1}=y(t_n)+hf(\tilde{\tilde{y}}_{n+\frac{h}{2}})$$

On remarque qu'il s'agit d'une méthode explicite.

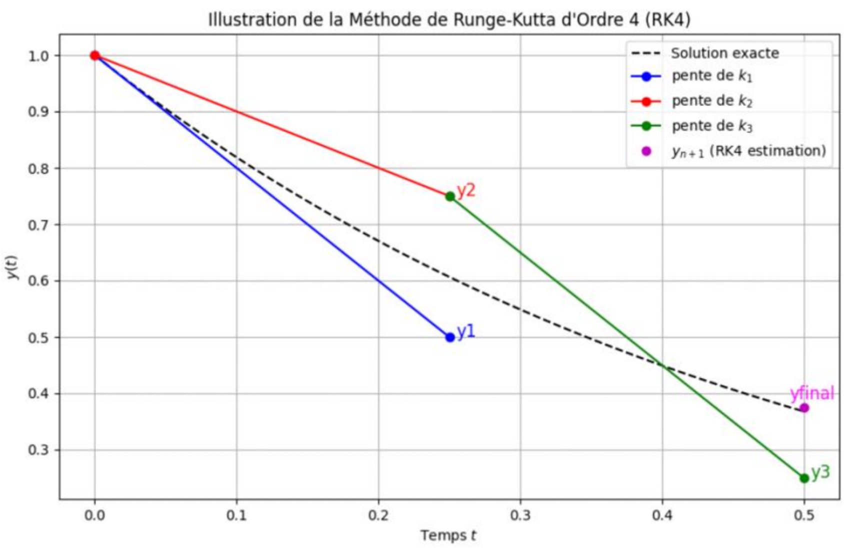
I.2. Mise en œuvre

Nous allons synthétiser cela, de façon à le rendre plus facile à mettre en œuvre.
On peut ainsi résumer la méthode RK4 par les étapes suivantes :
Nous voulons résoudre :

$$\begin{cases} y'(t)=f(y(t),t) \\ y(t_0)=y_0 \end{cases}$$

Remarque, dans la méthode, $y(t_0)$ peut très bien être une approximation à t_0 trouver à partir d'une précédente itération…

$$k_1=f(y(t_0),t_0)$$
$$y_1=y_0+k_1\times\frac{h}{2}$$
$$k_2=f(y_1,t_0+\frac{h}{2})$$
$$y_2=y_0+k_2\times\frac{h}{2}$$
$$k_3=f(y_2,t_0+\frac{h}{2})$$
$$y_3=y_0+k_3\times h$$
$$k_4=f(y_3,t_0+h)$$
$$y_{final}=y_0+\frac{h}{6}(k_1+2k_2+2k_3+k_4)$$



En pratique, on peut calculer directement y_{final} à partir des k_1, k_2, k_3 et k_4 sans calculer les points intermédiaires.

I.3. Exemple concret

Travaillons sur l'équation différentielle suivante avec un pas de 0,1 :

$$\begin{cases} y'(x)=f(y)=y(1-y) \;\; \forall x\in[0;0{,}2] \\ \quad y(0)=0{,}1 \end{cases}$$

On a :

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$
$$y_1 = y_0 + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

avec :

$k_1 = f\big(y(0)\big) = 0{,}1(1 - 0{,}1) = 0{,}09$
$k_2 = f\left(y_0 + k_1 \times \frac{h}{2}\right) = f(0{,}1 + 0{,}09 \times 0{,}05) = f(0{,}1045) = 0{,}1045(1 - 0{,}1045) = 0{,}09358$
$k_3 = f\left(y_0 + k_2 \times \frac{h}{2}\right) = f(0{,}1 + 0{,}09358 \times 0{,}05) = f(0{,}10468) = 0{,}10468(1 - 0{,}10468) = 0{,}09372$
$k_4 = f(y_0 + k_3 \times h) = f(0{,}1 + 0{,}09372 \times 0{,}1) = f(0{,}10937) = 0{,}10937(1 - 0{,}10937) = 0{,}09741$

Ainsi,

$$y_1 = y_0 + \frac{0{,}1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \approx 0{,}1093$$

On recommence ensuite avec y_1 pour trouver y_2…

$$y_2 = y_1 + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

$k_1 = f(y_1) = 0{,}1093(1 - 0{,}1093) = 0{,}09736$
$k_2 = f\left(y_1 + k_1 \times \frac{h}{2}\right) = f(0{,}1093 + 0{,}09736 \times 0{,}05) = f(0{,}1142) = 0{,}1142(1 - 0{,}1142) = 0{,}1011$
$k_3 = f\left(y_1 + k_2 \times \frac{h}{2}\right) = f(0{,}1093 + 0{,}1011 \times 0{,}05) = f(0{,}1144) = 0{,}1144(1 - 0{,}1144) = 0{,}1013$
$k_4 = f(y_1 + k_3 \times h) = f(0{,}1093 + 0{,}1013 \times 0{,}1) = f(0{,}1094) = 0{,}1094(1 - 0{,}1094) = 0{,}1052$

Ainsi,

$$y_2 = y_1 + \frac{0{,}1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \approx 0{,}1194$$

II. TP4 : Schéma de Runge-Kutta

1. Pour l'équation différentielle $y' = -2y$ avec $y(0) = 1$ vous allez écrire un programme qui vous permettra de calculer k_1, k_2, k_3 et k_4 ainsi que y_1, y_2, y_3 et y_{final} puis vous les placerez sur un graphique pour obtenir le même que ci-dessus où devra figurer aussi la solution exacte.
L'intervalle est [0, 1] et le pas de 0,5.

Aide Python :
`import matplotlib.pyplot as plt`
Pour tracer un segment [AB] :
`plt.plot([xA, xB], [yA, yZ], 'bo-', label='[AB]')`
Pour placer un point C :
`plt.plot(xC, yC, 'mo', label='C ')`
Nommer un point C:
`plt.text(xC, yC, "C", fontsize=12, color = 'magenta')`

2. En vous servant du 1, créer une fonction runge qui permettra de résoudre l'équation $y' = -2y$ avec $y(0) = 1$ sur l'intervalle [0,10] avec un pas de temps à définir.
Vous afficherez les y_{final} calculés ainsi que la solution exacte.

Aide Python :
Créer une séquence de nombres stockée dans un tableau numpy :
`import numpy as np`
`numpy_array = np.arange(start, stop, step)`

Créer un tableau numpy rempli de zéros pour un futur stockage :
`numpy_array_zero = np.zeros(shape) #shape sera la dimension de votre tableau`

Bonus pour les plus rapides :
On choisit τ = 1 et u0 = 1 pour l'équation différentielle $\frac{du}{dt} + \frac{u(t)}{\tau} = 0.$
3. Tracer le graphe de la solution exacte pour 0 ≤ t ≤ 1.

4. Créer une fonction runge (vous pourrez réutiliser votre travail du 2) qui permettra de calculer les approximations avec la Runge-Kutta 4 pour 0 ≤ t ≤ 1.

5. Soit $v(\Delta t, t = 1)$ la valeur approchée de $u(t = 1)$ à l'instant $t = 1$ pour le pas de temps Δt. Tracer la courbe de l'erreur $log\ |v(\Delta t, t = 1) - u(t = 1)|$ en fonction du paramètre $log\ (\frac{1}{\Delta t})$ pour des valeurs de Δt qu'on choisira de la manière la plus simple possible.
Retrouver ce qui a été trouvé dans le cours.

III. Schéma de Runge et Kutta pour le modèle $dW/dt = A.W(t)$

Nous voulons ici résoudre l'équation suivante :

$$\frac{dW}{dt} = A.W(t)$$

Avec $W = \binom{u}{v}$ et la matrice A=$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ \omega_0^2 & 0 \end{pmatrix}$ comme vu dans la séance 5.

$$k_1 = AW_n$$

$$W_1 = \widetilde{W}_{n+\frac{1}{2}} = W_n + AW_n\frac{h}{2} = (I_2 + \frac{h}{2}A)W_n$$

$$k_2 = A(I_2 + \frac{h}{2}A)W_n$$

$$W_2 = \widetilde{\widetilde{W}}_{n+\frac{1}{2}} = W_n + A(I_2 + \frac{h}{2}A)W_n\frac{h}{2} = (I_2 + \frac{h}{2}A(I_2 + \frac{h}{2}A))W_n$$

$$k_3 = A(I_2 + \frac{h}{2}A(I_2 + \frac{h}{2}A))W_n$$

$$W_3 = \widetilde{W}_{n+1} = W_n + A(I_2 + \frac{h}{2}A(I_2 + \frac{h}{2}A))W_n h = (I_2 + hA(I_2 + \frac{h}{2}A + \frac{h^2}{4}A^2))W_n$$

$$k_4 = A(I_2 + hA(I_2 + \frac{h}{2}A + \frac{h^2}{4}A^2))W_n$$

$$W_{n+1} = W_n + \frac{h}{6}(AW_n + 2A(I_2 + \frac{h}{2}A)W_n + 2A(I_2 + \frac{h}{2}A(I_2 + \frac{h}{2}A))W_n + A(I_2 + hA(I_2 + \frac{h}{2}A + \frac{h^2}{4}A^2))W_n$$

$$= \left[I_2 + \frac{h}{6}(A + 2A + 2A + A + hA^2 + hA^2 + hA^2 + \frac{h^2}{2}A^3 + \frac{h^2}{2}A^3 + \frac{h^2}{4}A^4\right]W_n$$

$$= \left[I_2 + hA + \frac{h^2}{2}A^2 + \frac{h^3}{6}A^3 + \frac{h^4}{24}A^4\right]W_n$$ 😅

On retiendra que le schéma de Runge-Kutta est précis à l'ordre 4.